



LANÇAMENTO OBLÍQUO COM RESISTÊNCIA DO AR

GILBERTO ORENGO

orengo@unifra.br

O movimento de uma partícula em duas dimensões pode ser observado, como descrito no diagrama abaixo, por intermédio de um lançamento oblíquo.

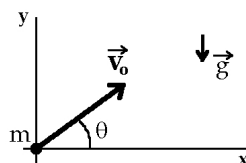


Figura 1 – Trajetórias obtidas com as equações (7) e (8).

Os componentes do movimento são:

$$\text{eixo } x : F = ma_x = 0, \quad (1)$$

$$\text{eixo } y : F = ma_y = -mg, \quad (2)$$

cuja solução para a posição é:

$$\text{eixo } x : x = Ut, \quad (3)$$

$$\text{eixo } y : y = -\frac{gt^2}{2} + Vt, \quad (4)$$

em que, $U = v_{0x} \cos \theta$ e $V = v_{0y} \sin \theta$ são as velocidades iniciais, respectivamente, na direção x e y , e θ é o ângulo entre a velocidade inicial v_0 e o eixo horizontal.

1. O LANÇAMENTO OBLÍQUO COM RESISTÊNCIA DO AR

Para resolvermos o problema de um lançamento oblíquo com resistência do ar, adotaremos as seguintes equações, já estudadas em aula, respectivamente, para movimento horizontal e vertical:

$$\text{eixo } x : F = ma = -kmv_x, \quad (5)$$

$$\text{eixo } y : F = ma = -kmv_y - mg, \quad (6)$$

em que k representa o coeficiente de resistência ou constante de retardamento. As soluções para as posições são:

$$\text{eixo } x : x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt}), \quad (7)$$

$$\text{eixo } y : y = -\frac{gt}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kt}). \quad (8)$$

Na última equação, (8), em acordo com as notas de aula, foi utilizado $h = 0$ porque a partícula parte do solo. Estas duas equações fornecem um par ordenado (x, y) , que descreverá a trajetória da partícula, conforme mostra a Figura 2, para $v_0 = 600,0 \text{ m/s}$ e ângulo 60° . Observe que as trajetórias com alguma resistência do ar ($k = 0.005 \text{ s}^{-1}$ e $k = 0.02 \text{ s}^{-1}$) não descrevem uma parábola, como ocorre no lançamento sem resistência do ar. A unidade de k é obtido da expressão e^{-kt} . O expoente é adimensional por natureza, portanto, a unidade de k será $(\text{unidade de tempo})^{-1}$. Adotando o Sistema Internacional de unidades (SI), o tempo é dado em segundos, então a unidade de k será s^{-1} .

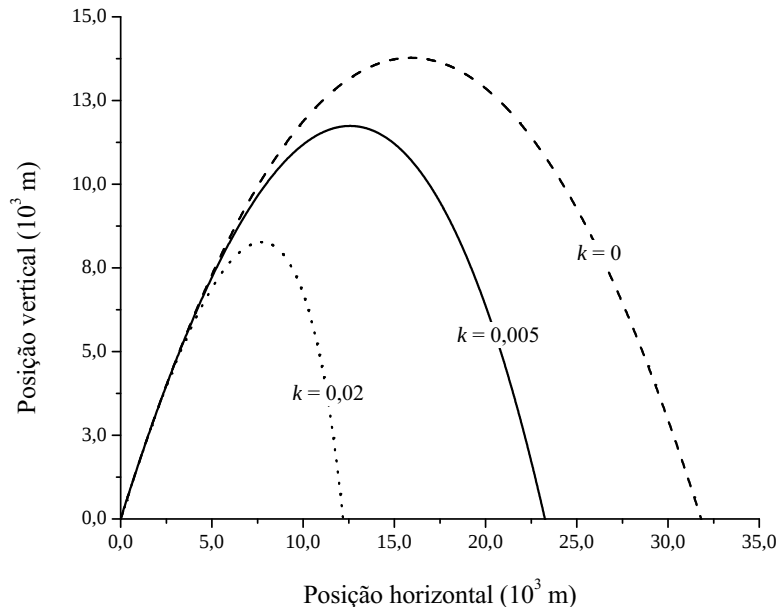


Figura 2 – Trajetórias obtidas com as equações (7) e (8), para $k = 0.005 \text{ s}^{-1}$ e $k = 0.02 \text{ s}^{-1}$, e com (3) e (4), para $k = 0$.

Para obtermos o alcance, que chamaremos de R' , faremos $y = 0$ e assim teremos o tempo necessário (T) para a partícula retornar ao solo. Assim, da equação (8),

$$y(t = T) = 0 = -\frac{gT}{k} + \frac{kV + g}{k^2}(1 - e^{-kT}),$$

obtemos:

$$T = \frac{kV + g}{gk}(1 - e^{-kT}), \quad (9)$$

que é uma equação transcendental, e a sua solução analítica não pode ser obtida diretamente. Existem alguns métodos para solucionar este problema. Entre eles temos a *solução numérica* e *método das perturbações*. Abordaremos o último.

2. O MÉTODO DAS PERTURBAÇÕES

Para utilizarmos o método das perturbações, devemos encontrar um *parâmetro de expansão* ou uma *constante de acoplamento*, que normalmente é muito pequena. Neste problema, este parâmetro é a constante de retardamento k , para valores pequenos. Desta forma, podemos expandir em séries de Taylor o termo

que contém a exponencial, isto é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (10)$$

Aplicada ao nosso caso fornece:

$$\begin{aligned} e^{-kT} &= 1 - kT + \frac{(-kT)^2}{2!} + \frac{(-kT)^3}{3!} + \frac{(-kT)^4}{4!} + \dots \\ &= 1 - kT + \frac{k^2T^2}{2} - \frac{k^3T^3}{6} + \frac{k^4T^4}{24} - \dots \end{aligned} \quad (11)$$

Se considerarmos que $k < 1$, ou que $k \approx 10^{-2}$, então $k^2 \approx 10^{-4}$, $k^3 \approx 10^{-6}$ e $k^4 \approx 10^{-8}$. Assim podemos desprezar os termos a partir da ordem k^4 , inclusive. A equação (9), para o tempo T , terá a forma:

$$\begin{aligned} T &= \frac{kV + g}{gk} \left(1 - 1 - kT + \frac{k^2T^2}{2} - \frac{k^3T^3}{6} \right) \\ &= \frac{kV + g}{gk} \left(-kT + \frac{k^2T^2}{2} - \frac{k^3T^3}{6} \right) \\ gkT &= k^2VT + gkT - \frac{k^3VT^2}{2} - \frac{gk^2VT^2}{2} + \frac{k^4VT^3}{6} + \frac{gk^3T^3}{6} \\ 0 &= k^2VT - \frac{k^3VT^2}{2} - \frac{gk^2VT^2}{2} + \frac{k^4VT^3}{6} + \frac{gk^3T^3}{6} \\ -k^2VT &= -\frac{k^3VT^2}{2} - \frac{gk^2VT^2}{2} + \frac{k^4VT^3}{6} + \frac{gk^3T^3}{6} \end{aligned} \quad (12)$$

E multiplicando a Eq. (12) por $2/(k^2T)$, teremos:

$$\begin{aligned} -2V &= -kVT - gT + \frac{k^2VT^2}{3} + \frac{gkT^2}{3} \\ -2V &= -(kV + g)T + \frac{k}{3}(kV + g)T^2 \\ -2V &= (kV + g) \left[-T + \frac{kT^2}{3} \right] \\ \frac{-2V}{kV + g} &= -T + \frac{kT^2}{3} \\ T &= \frac{2V}{kV + g} + \frac{k}{3}T^2 \end{aligned} \quad (13)$$

O primeiro termo, após a igualdade, da equação acima pode ser manipulada como segue.

$$\begin{aligned} T &= \frac{2V}{g \left(\frac{kV}{g} + 1 \right)} + \frac{k}{3}T^2 \quad g, \text{ no denominador, foi posto em evidência,} \\ T &= \frac{\frac{2V}{g}}{\left(1 + \frac{kV}{g} \right)} + \frac{k}{3}T^2 \\ T &= \frac{2V}{g} \left(1 + \frac{kV}{g} \right)^{-1} + \frac{k}{3}T^2 \end{aligned} \quad (14)$$

O termo

$$\left(1 + \frac{kV}{g} \right)^{-1}$$

pode ser expandido em séries de Taylor (ou conhecido como expansão binomial), da seguinte forma:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

ou

$$\left(1 + \frac{kV}{g}\right)^{-1} = 1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2 V^2}{g^2} - \dots$$

que truncada nos termos ao quadrado e substituída na equação (14), fornece:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2V}{g} \left(1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2 V^2}{g^2}\right) + \frac{k}{3} T^2 \\ T &= \frac{2V}{g} - \frac{2kV^2}{g^2} + \frac{2k^2 V^3}{g^3} + \frac{k}{3} T^2 \\ T &= \frac{2V}{g} + \left[\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2}\right] k + \mathcal{O}(k^2), \end{aligned} \quad (15)$$

em que $\mathcal{O}(k^2)$ significa ordem de k^2 , e abriga todos os termos de ordem 2 e superiores, que serão desprezados, resultando em

$$T \cong \frac{2V}{g} + \left[\frac{T^2}{3} - \frac{2V^2}{g^2}\right] k. \quad (16)$$

Aqui faremos uma pausa na nossa solução, para verificarmos com um simples teste se até o momento avançamos corretamente. Isto é, esta solução até aqui proposta para o tempo de vôo da partícula, deve conter a solução para o caso de $k \rightarrow 0$, ou seja:

$$T(k=0) = T_0 = \frac{2V}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}. \quad (17)$$

Assim, se o valor de k for muito pequeno, ou se possível nulo, o resultado reproduz o caso *sem resistência do ar*. Isto dá um bom indicativo que as aproximações até o momento propostas estão nos levando para uma solução do caso de movimento oblíquo com resistência do ar.

Então se usarmos o valor aproximado da equação (17) no lado direito da (16), teremos:

$$\begin{aligned} T &\cong \frac{2V}{g} \left[\left(\frac{2V}{g}\right)^2 \frac{1}{3} - \frac{2V^2}{g^2} \right] k \\ T &\cong \frac{2V}{g} + \frac{4}{3} \frac{V^2 k}{g^2} - \frac{2kV^2}{g^2} \\ T &\cong \frac{2V}{g} \left[1 + \frac{2}{3} \frac{Vk}{g} - \frac{kV}{g} \right] \\ T &\cong \frac{2V}{g} \left[1 - \frac{kV}{3g} \right], \end{aligned} \quad (18)$$

que fornece a expressão para o tempo de vôo da partícula. A seguir, fazendo a mesma aproximação da exponencial, eq. (11), na expressão para x , isto é, em⁽¹⁾

$$x = \frac{U}{k}(1 - e^{-kt})$$

obtemos para $t = T$:

$$x(t=T) = R' = U \left(T - \frac{1}{2} k T^2 \right), \quad (19)$$

e utilizando a eq. (18), temos:

$$R' = \frac{2UV}{g} \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right), \quad (20)$$

sendo

$$\frac{2UV}{g} = \frac{2v_0 \sin \theta v_0 \cos \theta}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \theta \cos \theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = R,$$

⁽¹⁾algumas das etapas seguintes fazem parte da lista de avaliação número 1.

que é o alcance sem resistência do ar. Assim temos, finalmente, o alcance

$$R' = R \left(1 - \frac{4kV}{3g} \right). \quad (21)$$

DÚVIDA: em que intervalos para k este método funciona?

A resposta é obtida verificando a expansão realizada na expressão

$$\frac{1}{1 + \frac{kV}{g}} = \left(1 + \frac{kV}{g} \right)^{-1} = 1 - \frac{kV}{g} + \frac{k^2 V^2}{g^2} - \dots$$

Esta série converge se

$$\frac{kV}{g} < 1,$$

fornecendo o intervalo de valores de k em que o método terá validade, isto é, com:

$$k < \frac{g}{V} = \frac{g}{v_0 \sin \theta}.$$

Nos resta testar a nossa solução para o alcance dada por (21).

3. EXERCÍCIO TESTE

Na primeira guerra mundial, a Alemanha utilizou canhões de longo alcance, chamados de *Big Bertha*, para bombardear Paris. A velocidade inicial dos projéteis era 1.450 m/s com um ângulo de 55°. **(a)** Encontre o alcance sem resistência do ar e, também, **(b)** com resistência cujo coeficiente é $k = 0,002 \text{ s}^{-1}$. **(c)** Para este valor de coeficiente, o método (das perturbações) utilizado funciona? Explique. **(d)** Qual a altura atingida pelo projétil em ambos os casos, com e sem resistência? A solução via gráfico está indicada na Figura 3.

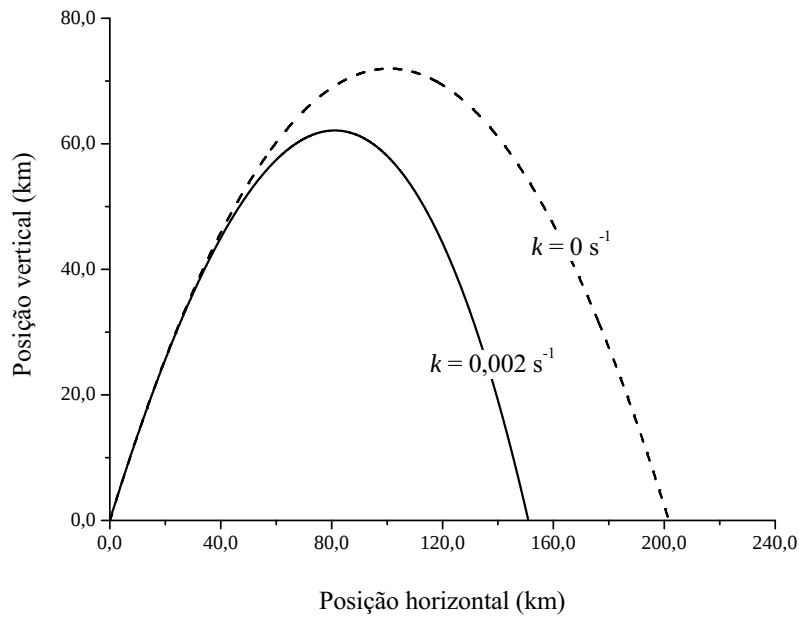


Figura 3 – Trajetórias obtidas para $k = 0.002 \text{ s}^{-1}$ e $k = 0$.