



LISTA DE EXERCÍCIOS 5

Suponha um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais em \mathbb{R}^3

$$\begin{cases} x = x(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ y = y(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \\ z = z(\xi_1, \xi_2, \xi_3). \end{cases} \quad (1)$$

Os novos versores coordenados são obtidos por

$$\hat{e}_n = \frac{1}{h_n} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi_n} \hat{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi_n} \hat{k} \right) \quad \text{com } h_n \text{ dado por } h_n^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_n} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_n} \right)^2, \quad (2)$$

com $n = 1, 2, 3$. A ortogonalidade do sistema de coordenadas exige que $\hat{e}_n \cdot \hat{e}_m = \delta_{mn}$. Com estes dados e também com o material de aula, resolva as três próximas questões.

1. Mostre que o sistema de coordenadas esféricas é ortogonal.
2. Dadas as relações para o sistema de coordenadas parabólicas $(\varepsilon, \eta, \phi)$ com as coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = \varepsilon \eta \cos(\phi), \\ y = \varepsilon \eta \sin(\phi), \\ z = \frac{1}{2}(\eta^2 - \varepsilon^2), \end{cases} \quad (3)$$

em que $\eta, \varepsilon \geq 0$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Mostre que o sistema é ortogonal (ou ortonormal).

3. Dadas as coordenadas elípticas oblatas, em função das coordenadas cartesianas

$$\begin{cases} x = a \cosh(\psi) \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = a \cosh(\psi) \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = a \sinh(\psi) \cos(\theta), \end{cases} \quad (4)$$

encontre os versores, e o Laplaciano, com a constante. Verifique se o sistema é ortogonal.

4. Para as funções periódicas em 2π , esquematize um gráfico para vários períodos, e expanda a função em senos e cossenos de Fourier.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

5. Encontre a expansão em série de Taylor (ou MacLaurin) para as seguintes funções, em torno de $x = 0$.

(a) $\cos(x)$ (b) $\tan(x)$ (c) e^x (d) $\ln(1+x)$ (e) $e^x \cos(x)$ (f) $\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$ (g) $e^{\tan(x)}$

Documento gerado em 10 de junho de 2009, às 9 h e 42 min.