FÍSICA MÉDICA

Área de Ciências Tecnológicas – Curso de Física: habilitação Física Médica

FSC215–Física Matemática I

Turma 11130 – 1° semestre de 2009 (05/maio)

Professor: Gilberto Orengo – orengo@unifra.br

LISTA DE EXERCÍCIOS 4

1. A inversa de uma matriz A, conhecida por A^{-1}, pode ser obtida pela expressão

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathsf{C}}}{\det \mathsf{A}}\,,$$

em que $\tilde{\mathsf{C}}$ é a transposta da matriz dos cofatores C, com C_{ij} = cofator de $a_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz menor (do desenvolvimento Laplaciano). Exemplo, seja a matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}, \quad \text{cuja inversa é dada por} \quad \mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathsf{A}} \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix},$$

em que,

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_5 & a_6 \\ a_8 & a_9 \end{vmatrix} = c_{11}\,, \qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_4 & a_6 \\ a_7 & a_9 \end{vmatrix} = c_{12}\,, \qquad (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_7 & a_8 \end{vmatrix} = c_{13}\,,$$

$$\vdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 \end{vmatrix} = c_{31}\,, \qquad (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_4 & a_6 \end{vmatrix} = c_{32}\,, \qquad (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_5 \end{vmatrix} = c_{33}\,.$$

(a) Mostre que

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad \text{tem como inversa} \quad \mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -bc & b \\ 0 & a^2+b^2 & 0 \\ -b & -ac & a \end{pmatrix}.$$

(b) Encontre a A^{-1} da matriz

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\cos\phi \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

É possível retirar alguma conclusão com o resultado obtido?

2. A comutação ou a falta dela é descrita pelo símbolo de parênteses comutadores (*commutator bracket symbol*): [A,B] = AB - BA. Se as matrizes comutam significa que AB = BA ou [A,B] = 0, e caso contrário, se AB $\neq$ BA ou [A,B] $\neq$ 0 as matrizes não comutam. Este procedimento é importante na Mecânica Quântica. Por exemplo, uma matriz (ou operador), que não dependa explicitamente do tempo, e comuta com o Hamiltoniano H será uma constante de movimento. Mais, chama-se *conjunto completo de observáveis (quantidades físicas que podem ser medidas)* o conjunto de operadores (ou matrizes) A, B, C $\cdots$ M, que comutam entre si, isto é [A,B] = [A,C] $\cdots$ [B,M] $\cdots$ = 0. Utilize este conceito para resolver os seguintes exercícios.

(a) Mostre que as matrizes

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

satisfazem as relações de comutação

$$[\mathsf{A},\mathsf{B}] = \mathsf{C}, \quad [\mathsf{A},\mathsf{C}] = 0 \quad \text{e} \quad [\mathsf{B},\mathsf{C}] = 0.$$

(b) Mostre que

$$(\mathsf{A}+\mathsf{B})(\mathsf{A}-\mathsf{B}) = \mathsf{A}^2 - \mathsf{B}^2 \,,$$

se e somente se $[\mathsf{A},\mathsf{B}] = 0$.

(c) Verifique a identidade de Jacobi

$$[\mathsf{A},[\mathsf{B},\mathsf{C}]] = [\mathsf{B},[\mathsf{A},\mathsf{C}]] - [\mathsf{C},[\mathsf{A},\mathsf{B}]] \,.$$

Esta identidade será útil na descrição de matrizes no estudo das partículas elementares.

(d) Sejam os operadores posição (x ou $\hat{x}$ ou x), momento linear (p ou $\hat{p}$ ou p) e o operador energia ou Hamiltoniano (H ou $\hat{H}$ ou H),

$$x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\,, \quad p = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\,, \quad H = \frac{p^2}{2m} + V(x)\,.$$

Encontre as relações de comutação:

$$[p,x]\,, \qquad [x,H]\,, \qquad [p,H] \qquad \text{e} \qquad [V(x),x]\,, \text{ em que } V(x) \text{ é o potencial.}$$

Obs.: utilize uma função $\psi(x,t)$ para aplicar os operadores. Isto tornará mais clara cada operação.

3. As três matrizes dos spins de Pauli são

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\,.$$

sendo i um número imaginário puro. Mostre que

(a) $\sigma_n^2 = \mathsf{1}$, com $n = 1, 2, 3$ e $\mathsf{1}$ é a matriz identidade.

(b) $\sigma_n\sigma_p = i\sigma_k$, com $(n,p,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)$ (permutação cíclica),

(c) $\sigma_n\sigma_p + \sigma_p\sigma_n = 2\sigma_{np}\mathsf{1}$.

Estas matrizes foram usadas por Pauli na teoria não-relativística para o spin do elétron.

4. As matrizes L^+ e L^-, descritas abaixo, são *operadores de levantamento*. O L^+ operando sobre um sistema de projeção spin m elevará a projeção spin para $m+1$ se m está abaixo de seu máximo. O L^- operando sobre m produzirá um zero. O L^- reduz a projeção spin em uma unidade numa maneira similar.

$$\mathsf{L}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathsf{L}^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

Mostre que

$$\begin{aligned} \mathsf{L}^+|{-1}\rangle &= |0\rangle\,, \\ \mathsf{L}^-|{-1}\rangle &= \text{vetor coluna nulo}\,, \\ \mathsf{L}^+|0\rangle &= |1\rangle\,, \\ \mathsf{L}^-|0\rangle &= |{-1}\rangle\,, \\ \mathsf{L}^+|1\rangle &= \text{vetor coluna nulo}\,, \\ \mathsf{L}^-|1\rangle &= |0\rangle\,, \end{aligned}$$

em que

$$|{-1}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \qquad |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,, \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,,$$

representam os estados da projeção spin -1, 0 e 1, respectivamente.

Documento gerado em 4 de maio de 2009, às 21 h e 31 min.